Cálculo de Areas de Superficies

MA-2113, Guía #1

Preparado, resuelto y tipeado en LaTeX por Axel Voza

En esta primera guía continuamos con una de las aplicaciones que habían quedado pendientes en MA-2112: el cálculo integral que envuelve integrales sobre superficies e integrales de funciones vectoriales.

Para comenzar, definimos (aunque esto es una genaralización natural del concepto de plano tangente), para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada[1] por $\mathbf{\Phi} : \Omega = [a, b] \times [c, d] \to S$ el *producto fundamental* como

$$\eta(u, v) = (\mathbf{\Phi}'_u \times \mathbf{\Phi}'_v)(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Nótese que como este vector depende de u, v, esta η es una función que proporciona un vector normal al plano tangente *para cada punto de la superficie*.

En cuanto a los requisitos que debe satisfacer $\mathbf{\Phi}$, es claro que el producto cruz anterior es cero si las filas del determinante son proporcionales, o si alguna de ella es una fila de ceros. Pero en en el primer caso, la parametrización $\mathbf{\Phi}$ *representa una curva* y no una superficie, por lo que no tenemos plano tangente (esto equivale a que Ud. debe asegurarse que la transformación que halló parametrize realmente la superficie).

Además, recordemos que la teoría de integración pide que la parametrización de una curva en el espacio sea suave a trozos, para que se pueda calcular la longitud de dicha curva. Asimismo, toda parametrización de superficies exige (para el trabajo de integración que haremos luego) que tal $\mathbf{\Phi}$ sea suave en su dominio $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, es decir, que el determinante del producto fundamental **debe ser distinto de cero**, para todo par $(u, v) \in \Omega$.

1. En los siguientes ejercicios, hallar una parametrización $\mathbf{\Phi} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ que describa las superficies dadas, y utilizarla para hallar la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto indicado:
   (a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $P = (3, 4, -7)$.
   (b) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $P = (1, 2, -1)$.
   (c) $z = \operatorname{lgn}(x^2 + y^2)$, $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.
   (d) $z = \arctan(y/x)$, $P = (1, 1, \pi/4)$.

2. En cada uno de los siguientes ejercicios, identificar la superficie parametrizada por cada transformación y calcular la magnitud del producto fundamental:
   (a) $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u + v, u - v, 4v^2)$.
   (b) $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$.
   (c) $\mathbf{\Phi}(\theta, t) = (t \cos\theta, t \operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2} t^2 \operatorname{sen} 2\theta)$.
   (d) $\mathbf{\Phi}(\theta, t) = (a \operatorname{sen}\theta \cosh t, b \cos\theta \cosh t, c \operatorname{senh} t)$.

3. Demostrar que las intersecciones x, y, z del plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a$ (con $a > 0$) en el punto $(a^2/9, a^2/9, a^2/9)$ suman la cantidad a.

4. Desarrollar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$, suponiendo que las derivadas parciales de h existen en todo $\mathbf{R}^2$. Verificar que la parametrización usada es regular.

5. Considerar las superficies $\mathbf{\Phi}_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_1(u, v) &= (u + v, u - v, uv) , \\ \mathbf{\Phi}_2(u, v) &= (u^3 + v^3, u^3 - v^3, u^3 v^3) , \end{aligned}$$

   (a) Demostrar que la imagen de cada $\mathbf{\Phi}_i$ es el paraboloide hiperbólico (o silla de montar) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{4}$.
   (b) Demostrar que todos los puntos de $\mathbf{\Phi}_1$ son regulares, pero que $\mathbf{\Phi}_2$ tiene infinitos puntos de no regularidad ubicados sobre dos rectas.
   (c) Concluír que la noción de superficie regular depende de la existencia de *por lo menos una* parametrización que sea regular, y no solo

[1] En estas primeras guías, los vectores se señalarán en negritas.

de la forma geométrica de la superficie. ¿Se puede hallar otra parametrización suave para esta silla de montar?

6. *La superficie $P(u,v)$ parametrizada por $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = 2uv$ cumple con la relación $x^2-y^2 = z^2$, y además se sabe que al punto $(u,v) = (1,1)$ le corresponde el punto $P_0 = (x,y,z) = (2,0,2)$.
   (a) Calcular el gradiente de $\mathbf{\Phi}(x,y,z) = x^2-y^2-z^2$ en P_0.
   (b) Calcular el producto vectorial fundamental
   $$\frac{\partial P}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial P}{\partial v}(u,v) \ .$$
   (c) Hallar la constante de proporcionalidad λ de la ecuación
   $$\frac{\partial P}{\partial u}(1,1) \times \frac{\partial P}{\partial v}(1,1) = \lambda \nabla\mathbf{\Phi}(P_0) \ .$$

Los ejercicios hasta ahora expuestos tuvieron la finalidad de preparanos para el cálculo de las primeras integrales dobles, es decir, el cálculo de áreas de superficies.

Dada una parametrización $\mathbf{\Phi} : \Omega \to S$ suave, se define (otra vez se puede ver que se trata de una generalización; en este caso se trata de la suma infinita de planos tangentes infinitesimales) el área de S como

$$\text{área}(S) = \iint_\Omega \|\mathbf{\Phi}'_\theta \times \mathbf{\Phi}'_t\| \, du\, dv \ ,$$

recordando que, usando teoría de integrales, si S es suave a trozos, el área anterior se puede descomponer en suma de integrales sobre superficies regulares. Usando un poco de álgebra lineal y las notaciones sobre determinantes vistas en MA-2112, la fórmula anterior tiene la forma

$$\iint_\Omega \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2} \, du\, dv \ ,$$

donde cada término en la suma de cuadrados es el módulo del jacobiano de dichas variables.

7. Calcular el área de la región determinada por el plano $x+y+z = a$ y el cilindro $x^2+y^2 = a^2$

8. *La bóveda de Viviani*: Calcular el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, interior al cilindro $x^2+y^2 = ay$, donde $a > 0$.

9. *Sea S el paraboloide $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$. Hallar el área de la porción de S que está situada debajo de la curva de intersección de S con el cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{81} = 1$.

10. *El *toro*
    $$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (r-b)^2+z^2 = a^2,\ r^2 = x^2+y^2\}$$
    (donde $b > a > 0$) puede ser parametrizado por $\mathbf{\Phi} : [0,2\pi)^2 \to T$, definido como
    $$\mathbf{\Phi} \equiv \begin{cases} x = (b + a\cos\phi)\cos\theta \\ y = (b + a\cos\phi)\operatorname{sen}\theta \\ z = a\operatorname{sen}\phi \end{cases} .$$
    Hallar el área de la superficie del toro.

11. *Hallar el área de la superficie limitada por la intersección de los cilindros $x^2+y^2 = a^2$ y $x^2+z^2 = a^2$.

12. Considerar la superficie S obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ alrededor del eje y. Demostrar que al área de la superficie barrida viene dad por
    $$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1+(f'(x))^2} \, dx \ ,$$
    suponiendo que $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, y utilizar este resultado para calcular el área de la superficie parabólica obtenida al hacer girar la curva $y = x^2$ en $[0,1]$ alrededor del eje y.

13. *Sea $D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una parametrización de una superficie S definida por
    $$\mathbf{\Phi}(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v)) \ ,$$
    donde todas las derivadas parciales de la ϕ_i existen.
    (a) Si
    $$E = \left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2 \ , \ F = \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v} \ \text{ y } \ G = \left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2 \ ,$$
    demostrar que
    $$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{EG-F^2} \, du\, dv \ .$$
    (b) Supongamos que $\dfrac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}$ son ortogonales, que $\dfrac{\partial}{\partial v}\left\|\dfrac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\| = \dfrac{\partial}{\partial u}\left\|\dfrac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\| = 0$ y que $D = [a,b] \times [c,d]$ es un rectángulo. Simplificar la fórmula de la parte anterior como el producto de dos integrales simples.

(c) Usar las dos partes anteriores para calcular el área de una esfera de radio r.

14. *Considérense las superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2 \} \text{ y} \\ S_2 &= \{ \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2=a^2 \} , \end{aligned}$$

cortadas por los planos $z = b$, $z = -b$, donde $0 \leq b \leq a$. ¿Existe algún valor de b donde el área de la porción de S_1 que está entre los planos es estrictamente mayor que el área de la porción de S_2 entre los mismos planos?

15. *Dada una superficie S de ecuación vectorial

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u^2) ,$$

donde $0 \leq u \leq 4$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

(a) Demostrar que S es una porción de cuádrica, identificarla, dibujarla e indicar el significado geométrico de los parámetros u y v en la superficie.

(b) Calcular el producto fundamental de $\mathbf{\Phi}$ en términos de u y v.

(c) El área de S es $\dfrac{\pi}{n}(65\sqrt{65}-1)$, donde n es un entero. Calcular el valor de n.

16. ***Una generalización del Teorema de Pitágoras*: Sea S un paralelogramo en $\mathbf{R}^3$, tal que ninguno de sus lados son paralelos a los ejes de coordenadas, y sean S_1, S_2, S_3 las áreas de las proyecciones de S sobre los tres planos coordenados. Demostrar que el área de S viene dada por $\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$.

17. Demostrar que la superficie $x = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$ se puede "llenar" de pintura, pero no se puede "pintar" (*Sugerencia*: use sin justificación el hecho de que la integral impropia resultante existe).

18. Sea $F(x,y,z) = 0$ la ecuación implícita de una superficie S en $\mathbf{R}^3$, siendo F diferenciable respecto a sus tres variables. Demostrar que el área de S viene dada por

$$\text{área}(S) = \iint_S \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\, dx\, dy$$

Pasemos ahora a integrales de campos escalares y vectoriales sobre superficies.

Así como en integrales de línea (ya conocidas por Ud. desde MA-2112) denotábamos $ds = \|\sigma'(t)\|\, dt$, donde σ era una parametrización de una cierta curva, denotaremos $dS = \|(\mathbf{\Phi}'_u \times \mathbf{\Phi}'_v)(u,v)\|\, du\, dv$ (haga un dibujo para convencerse de las analogías geométricas de estos diferenciales). Si $f : S \to \mathbf{R}^3$ es continua, $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ es un campo vectorial (también continuo) y S es una superficie parametrizada por $\mathbf{\Phi} : \Omega \to S$, definimos

$$\begin{aligned} \iint_S f\ dS &= \iint_\Omega (f \circ \mathbf{\Phi})(u,v) \|\mathbf{\Phi}'_u \times \mathbf{\Phi}'_v\|\, du\, dv \text{ y} \\ \iint_S \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{S} &= \iint_\Omega (\mathbf{F} \circ \mathbf{\Phi})(u,v) \cdot (\mathbf{\Phi}'_u \times \mathbf{\Phi}'_v)\, du\, dv \end{aligned}$$

En el primer caso, si $f(x,y,z) = \sigma(x,y,z)$ es la densidad superficial de S, la integral anterior calcula la *masa* de S, y si $f(x,y,z) \equiv 1$, recobramos la definición anterior de área de la superficie S. En cuanto a las otras aplicaciones de estas integrales, es fácil generalizar las fórmulas vistas por Ud. en MA-2112 para el cálculo de centros de masa, como por ejemplo la fórmula para la x-coordenada del centro de masa de S:

$$\overline{x} = \frac{1}{\text{masa}(S)} \iint_S x\ dS\ .$$

19. Calcular las integrales $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ siguientes:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\,,\, 2x\,,\, -z)$ y S es el plano $2x + y = 6$ situada en el primer octante y por debajo del plano $z = 4$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2\,,\, -2x\,,\, 2yz)$ y S es el plano $2x + y + 2z = 6$ situada en el primer octante.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y\,,\, -z\,,\, x^2)$ y S es el cilindro $y^2 = 8x$ situada en el primer octante y limitada por los planos $y = 4$ y $z = 6$.

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (6z\,,\, 2x+y\,,\, -x)$ y S es el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ situada en el primer octante y a la izquiera del plano $y = 8$.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xz\,,\, xyz^2\,,\, 3z)$ y S es el cono $z = \sqrt{x^x + y^2}$ por debajo del plano $z = 4$.

20. Calcular las siguientes integrales de superficie:

(a) $\displaystyle\iint_S x\ dS$, si

$$S = \{ x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x,y,z \geq 0 \}$$

(b) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\ dS$, si

$$S = \{\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z\in[0,1]\ \}\ .$$

(c) $\displaystyle\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, si

$$S = \{\ x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0\ \}\ .$$

(d) $\displaystyle\iint_S \frac{dS}{r^2}$, si

$$S = \{\ x^2+y^2=R^2,\ 0\leq z\leq H\ \}\ ,$$

y donde r es la distancia desde el origen hasta cualquier punto de S.

21. Hallar la masa de la parte superior de una esfera de radio a, si su densidad de masa viene dada por $\sigma(x,y,z)=z/a$.

22. Hallar el centro de gravedad de la porción de superficie esférica homogénea $x^2+y^2+z^2=a^2$ situada sobre el primer cuadrante del plano x,y

23. Hallar el centro de gravedad de la figura homogénea determinada por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el cilindro $x^2+y^2=ax$.

24. Demostrar la *fórmula de Poisson*:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\ dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(ku)\ du\ ,$$

donde $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ y S es la esfera unitaria centrada en el origen.

25. Calcular la integral $\displaystyle\iint_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z)\ dS$, donde

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2 & ,\quad z\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & ,\quad z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}\ .$$

26. **Sea S una esfera de radio r y $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$ un punto que **no está** en la frontera de S. Si d es la distancia desde $\mathbf{p}$ hasta el centro de S, demostrar que

$$\iint_S \frac{dS}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \begin{cases} 4\pi r & ,\quad \text{si } \mathbf{p} \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r/d & ,\quad \text{si } \mathbf{p} \text{ está fuera de } S. \end{cases}$$

Respuestas a algunos de los ejercicios:

1. (a) $17x+11y+5z=60$; (b) $x+11y+5z=18$; (c) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-z=2$; (d) $x-y+2z=\pi/2$: intente poner a x y y las coordenadas polares con radio variable.

2. (a) El paraboloide de traslación $z=(x-y)^2$;

$$\|\mathbf{\Phi}'_u\times\mathbf{\Phi}'_v\| = 2\sqrt{32v^2+1}\ .$$

(b) La superficie $z=\dfrac{1}{2}(3xy-x^3)$;

$$\|\mathbf{\Phi}'_u\times\mathbf{\Phi}'_v\| = |u-v|\sqrt{36u^2v^2+9(u+v)^2+4}\ .$$

(c) La silla de montar $z=xy$; $\|\mathbf{\Phi}'_\theta\times\mathbf{\Phi}'_t\|=|t|\sqrt{t^2+1}$.
(d) El cono doble $\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$; $\|\mathbf{\Phi}'_\theta\times\mathbf{\Phi}'_t\|=$

$$= abc\cosh t\left[\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)\cosh^2 t+\frac{\operatorname{senh}^2 t}{c^2}\right]^{1/2}.$$

4. Sea $\mathbf{\Phi}(u,v)=(h(u,v),u,v)$. Entonces

$$(\mathbf{\Phi}'_u\times\mathbf{\Phi}'_v)(u,v)=\left(1,-\frac{\partial h}{\partial u},-\frac{\partial h}{\partial v}\right)\neq(0,0,0)\ .$$

Así, el plano tangente en cualquier punto $(x_0,y_0,z_0)=\mathbf{\Phi}(u_0,v_0)$ viene dado por

$$x-x_0=\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0)(y-y_0)+\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0)(y-y_0)\ .$$

6. (a) $\nabla\mathbf{\Phi}(P_0)=(4,0,-4)$; (c) $\lambda=2$.
7. $a^2\pi\sqrt{3}$.
8. $(2\pi-4)a^2$.
9. $72\pi(2\sqrt{2}-1)/3$.
10. $4ab\pi^2$.
11. $16a^2$.
12. $\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

13b. $\text{área}(S)=\left(\displaystyle\int_a^b\left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|\ du\right)\left(\displaystyle\int_c^d\left\|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|\ dv\right)$.

15. (a) Un paraboloide de revolución;
(b) $(-2u^2\cos v,-2u^2\operatorname{sen}v,u)$; (c) $n=6$.

19. (a) 108. (b) 81. (c) 132. (d) 18π. (e) 320π.

20. (a) $\dfrac{\pi R^3}{4}$; (b) $\dfrac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$; (c) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\operatorname{lgn}2$; (d) $2\pi\arctan\left(\dfrac{H}{R}\right)$.

21. πa^2.
22. $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$.

23. $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\left(\dfrac{a}{2},0,\dfrac{16a}{9\pi}\right)$.
25. $\dfrac{\pi a^4}{6}(8-5\sqrt{2})$.